הפקולטה למתמטיקה, הטכניון
סמסטר אביב, תשס"ו

# בוחן בחדו"א 1/מ (104010)

מורה אחראי: פרופ' יואב בנימיני

- משך הבוחן שעתיים.
- הניקוד: יש 5 שאלות אמריקאיות. כל תשובה נכונה מזכה ב- 6 נקודות.
  יש 3 שאלות פתוחות. הניקוד מצויין ע"י כל סעיף.
- אין להשתמש בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש למלא את כל הפרטים האישיים הן בטופס התשובות האמריקאיות והן בראש הדפים לתשובות על השאלה הפתוחה.
- החלק האמריקאי:
  - את התשובות לשאלות האמריקאיות יש לסמן בטופס המיועד לכך, ולהקפיד על מילוי הטופס עפ"י ההוראות.
  - <u>יש להגיש רק טופס זה, ולא את דפי השאלות.</u>
  - יש 9 טורי בחינה שונים. מספר הטור של הבחינה שלך מופיע בראש דף השאלות האמריקאיות. <u>יש להקפיד ולהעתיק את מספר הטור במקום המיועד לכך בטופס התשובות!</u>
- החלק הפתוח:
  - יש למלא את הפרטים האישיים בראש כל דף.
  - יש לתת פתרון מלא ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.

בהצלחה!

# שאלות אמריקאיות

| טור מספר: $*$ |
|---|

נא למלא את הפרטים האישיים על טופס התשובות ולציין את מספר הטור!
יש להשתמש בעט שחור או כחול בלבד. אין להשתמש בעפרון!

שאלה 1. הגבול של הסדרה $a_n = n\tan\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)$ הוא:

א. $e^3$ ב. $e^{-3}$ ג. $0$ ד. לא קיים ה. $+\infty$

פתרון

$$\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)}{\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}$$

עפ"י אריתמטיקה של גבולות של סדרות, ומאחר ש- $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, ו- $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, בצירוף העובדה שאם $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ אז לכל סדרה $x_n \to 0$ שאיבריה שונים מ- $0$ גם $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

שאלה 2. בקרן $[0,\infty)$ הפונקציה $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ היא

א. חסומה מלרע ומלעיל ומקבלת מכסימום ומינימום

ב. חסומה מלרע ומלעיל, מקבלת מכסימום ואינה מקבלת מינימום

ג. חסומה מלרע ומלעיל, מקבלת מינימום ואינה מקבלת מכסימום

ד. חסומה מלעיל ולא מלרע

ה. חסומה מלרע ולא מלעיל

פתרון

לכל $x$ ממשי, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$. לכן $f$ חסומה מלעיל על-ידי $1$. זהו חסם המלעיל הקטן ביותר, כי $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$. מאחר ש-$1$ אינו ערך של $f$, $f$ אינה מקבלת מכסימום בקרן.

לכל $x \geq 0$, $x \geq -x$, ולכן $e^x \geq e^{-x}$. מכאן שלכל $x \geq 0$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \geq 0$. לכן $f$ חסומה מלרע בקרן על-ידי $0$. מאחר ש- $f(0) = 0$, $f$ מקבלת מינימום בקרן, בנקודה $x = 0$.

שאלה 3. הגבול $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$ הוא

א. $\infty$ ב. $-\infty$ ג. לא קיים ד. $1$ ה. $-1$

פתרון
מאחר של- $x<0$ מתקיים: $x=-\sqrt{x^2}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=-1$$

עפ"י אריתמטיקה של גבולות.

שאלה 4. הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת על-ידי:

$$a_1=a_2=1$$

$$a_{n+1}=2-a_n^2-a_{n-1}^2 \qquad n\geq 2$$

אז

א. הסדרה מונוטונית ב. אין לסדרה גבול ג. $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

ד. $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{-\sqrt{17}-1}{4}$ ה. $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

פתרון
נחשב את האיברים הראשונים: $a_5=1,a_4=1,a_3=0,a_2=1,a_1=1$. מנוסחת הנסיגה ברור שמכאן והלאה יחזרו אותם ערכים, כך ש- $a_n=1$ לכל $n$ שאינו כפולה של 3 ו- $a_n=0$ כאשר $n$ הוא כפולה של 3. לכן לסדרה אין גבול, אפילו לא במובן הרחב (יש לה שני גבולות חלקיים שונים: 0 ו- 1).

שאלה 5. תהי

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x+2)\sin^2(x-2)}{x^2-4} & \text{אם } x\neq\pm2\\ 0 & \text{אם } x=\pm2\end{cases}$$

אז

א. $f$ היא רציפה ב- $x=\pm2$

ב. ל- $f$ יש אי-רציפות מסוג קפיצה ב- $x=-2$

ג. ל- $f$ יש אי-רציפות עיקרית ב- $x=2$

ד. ל- $f$ יש אי-רציפות סליקה ב- $x=-2$

ה. ל- $f$ יש אי-רציפות סליקה ב- $x=2$

פתרון

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x+2)}{x+2} \cdot \frac{\sin(x-2)}{x-2} \cdot \sin(x-2) = \frac{\sin 4}{4} \cdot 1 \cdot 0 = 0 = f(2)$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{\sin(x+2)}{x+2} \cdot \frac{\sin^2(x-2)}{x-2} = 1 \cdot \frac{\sin^2(-4)}{-4} = \frac{\sin^2(-4)}{-4} \neq f(-2)$$

לכן $f$ רציפה ב- $x = 2$ ויש לה אי-רציפות סליקה ב- $x = -2$.

# שאלות פתוחות

יש להשתמש בעט שחור או כחול בלבד. אין להשתמש בעפרון!

| מדבקה |
|---|

| שם משפחה: | שם פרטי: | מס. זהות: | ציון: |
|---|---|---|---|

שאלה 1.

(9%) א. הגדירו בלשון $\varepsilon, \delta$ : הפונקציה $f$ רציפה בנקודה $x_0$.

תשובה

פונקציה $f$ המוגדרת בסביבת $x_0$ היא רציפה ב- $x_0$ אם מתקיים:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(20%) ב. (משיעורי הבית) הוכיחו לפי ההגדרה (בלשון $\varepsilon, \delta$) כי אם $\lim_{x\to b} f(x)$ קיים וערכו $L$, ואם $a \neq 0$, אז גם $\lim_{x\to 0} f(ax+b) = L$.

תשובה

בהנתן $\varepsilon > 0$, על-פי הנתון קיים $\delta' > 0$ כך ש-

אם $0 < |t - b| < \delta'$ אז $|f(t) - L| < \varepsilon$. (1)

וצריך להוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x| < \delta$ אז

$|f(ax+b) - L| < \varepsilon$. (2)

נשתמש ב- (1) עבור $t = ax + b$, ונקבל ש- (2) מתקיים כאשר $0 < |(ax+b) - b| < \delta'$, כלומר כאשר $0 < |x| < \frac{\delta'}{|a|}$. לכן $\delta = \frac{\delta'}{|a|}$ מקיים את הנדרש.

שאלה 2.

(9%) א. נסחו את משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות.

תשובה

תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, כך ש- $f(a) < f(b)$, ויהי $f(a) < \gamma < f(b)$. אז קיים $a < c < b$ כך ש- $f(c) = \gamma$.

(כנ"ל אם $f(a) > \gamma > f(b)$).

(20%) ב. הוכיחו את הטענה הבאה (שהיא חלק מהוכחת משפט ערך הביניים): אם הסדרות $\{a_n\}$ ו - $\{b_n\}$ מקיימות $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ לכל $n$, ואם $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, אז שתי הסדרות מתכנסות, ויש להן גבול משותף.

צטטו במדויק משפטים שאתם מסתמכים עליהם.

תשובה

נתון שלכל $n$ טבעי

$$a_n \overset{(1)}{\le} a_{n+1} \le b_{n+1} \overset{(2)}{\le} b_n .$$

(1) פירושו שהסדרה $\{a_n\}$ עולה, ו- (2) פירושו שהסדרה $\{b_n\}$ יורדת. בפרט, $a_n \ge a_1$ ו- $b_n \le b_1$ לכל $n$, ומאחר ש- $a_n \le b_n$, נובע ש- $a_1$ הוא חסם מלרע לסדרה היורדת $\{b_n\}$, ו- $b_1$ הוא חסם מלעיל לסדרה העולה $\{a_n\}$. סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת, לכן קיימים הגבולות $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$. על-פי אריתמטיקה של גבולות $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = L_2 - L_1$. אבל נתון ש- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, לכן $L_1 = L_2$.

שאלה 3. בכל אחת מהטענות הבאות סמנו אם היא נכונה או איננה נכונה:

(4%) א. כל סדרה חסומה מלעיל ומלרע היא סדרה מתכנסת.

נכון / לא נכון

תשובה: לא נכון. דוגמא נגדית: $a_n = (-1)^n$.

(4%) ב. אם $f, g$ שתי פונקציות שרציפות בנקודה $x_0$, ואם $f(x_0) > g(x_0)$, אז יש סביבה של $x_0$ כך ש- $f(x) > g(x)$ לכל $x$ בסביבה.

נכון / לא נכון

תשובה: נכון. הפונקציה $h = f - g$ רציפה ב- $x_0$, כהפרש פונקציות רציפות בנקודה, ו- $h(x_0) > 0$. לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x$ המקיים $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $h(x) > \frac{h(x_0)}{2} > 0$. ולכן $f(x) > g(x)$ בסביבה $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(4%) ג. אם הסדרות $\{a_n\}$ ו - $\{b_n\}$ מקיימות ש- $\sup a_n \le \sup b_n$, אז יש $N$ כך ש - $a_n \le b_n$ לכל $n > N$.

נכון / לא נכון

תשובה: לא נכון. דוגמא נגדית: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ו- $b_n = 3 - n$. $\sup a_n = \lim a_n = 1$ (כי $\{a_n\}$ עולה), ו- $\sup b_n = b_1 = 2$ (כי $\{b_n\}$ יורדת). לכן $\sup b_n = 2 > 1 = \sup a_n$, אבל בדוגמא זו, מאחר ש- $\lim b_n = -\infty$ ו- $\lim a_n = 1$, דווקא קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n < a_n$.